

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота
бакалавра

на тему ***«Умова повертайності для лінійної
системи другого порядку з одним нульовим
власним значенням»***

Виконав: студент групи МП41,
спеціальність
113 – Прикладна математика,
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика»
Лисойван А.В.

Науковий керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Сморцова Т.І.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,
пров. наук. співробітник
ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна
НАН України,
професор
Фардигола Л.В.

Анотації

Лисойван Антон Володимирович. Умова повертайності для лінійної системи другого порядку з одним нульовим власним значенням. У роботі досліджено задачу забезпечення повернення лінійної системи другого порядку з одним нульовим власним значенням у нульовий стан. Наведено умову повертайності такої системи. Розібрані керування з різною кількістю точок перемикавання. Наведені приклади, що проілюстровані графіками. Також наведений код для чисельного визначення точок перемикавання та побудови графіка системи.

Ключові слова: керованість, умова повертайності, лінійна система, нульове власне значення.

Lysojvan Anton Volodymyrovych. Returnability condition for a second-order linear system with one zero eigenvalue. This thesis investigates the problem of ensuring the return of a second-order linear system with one zero eigenvalue to the zero state. The return condition for such a system is considered. Controls with different numbers of switching points are analyzed. Examples are given, illustrated with graphs. Code is also provided for numerical determination of switching points and construction of a graph of the system.

Keywords: controllability, return condirion, linear system, zero eigenvalue.

Зміст

Вступ	4
1. Основні поняття	5
1.1. Означення	5
2. Теоретична частина	8
2.1. Умова повертатності для довільних лінійних систем другого порядку, матриця яких має дійсні власні значення, одне з яких нуль	8
2.1.1. Керування з одним перемиканням	9
2.1.2. Керування з двома перемиканнями	11
3. Практична частина	13
3.1. Опис середовища програмування	13
3.2. Приклад системи	13
3.3. Синтез керування	14
Висновки	16
Список використаних джерел	17
Додаток	18

Вступ

Керованість лінійних систем з обмеженнями на керування є одним із питань, які є в центрі уваги сучасних математиків. Актуальність цього питання пов'язана з тим, що одним із методів дослідження нелінійних керованих систем є їх відображення на системи більш простого вигляду, зокрема, на лінійні, які мають вигляд

$$\dot{x} = Ax + bu(t). \quad (0.1)$$

Для дослідження задачі попадання в точку, яка не є точкою спокою такої системи, за довільних обмежень на керування, в роботі [1] введено умову повертайності на відрізку, яка відрізняється від умови повертайності за час T , яку було розглянуто раніше. Деякі підкласи систем розглядалися раніше в роботах [2], [3], в яких, зокрема, наведено низку прикладів із перевірки та застосування умови повертайності.

У цій роботі розглядається лінійна система другого порядку в загальному вигляді. Оскільки поведінка розв'язків системи залежить від власних значень матриці системи, то різні випадки маємо розглядати окремо. У цій роботі досліджуємо виконання умови повертайності для системи, матриця якої має одне нульове власне значення. Для неї сформульована умова повертайності початку координат за допомогою кусково-сталих керувань, наведені формули для знаходження точок розриву відповідного керування. Розібрані випадки з різною кількістю точок перемикання керування. Робота є продовженням роботи [3], в якій було розглянуто лінійну систему другого порядку, матриця якої має різні ненульові дійсні власні значення.

Розділ 1

Основні поняття

1.1. Означення

Ця робота ґрунтується на результатах роботи [1]. Наведемо деякі з них, які будемо використовувати надалі.

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad (1.1)$$

де A — матриця, а $\varphi(u)$ — неперервна n -вимірна вектор-функція.

Нехай $S(T)$ — множина θ -керуваності системи (1.1) за час $T > 0$. Це означає, що для довільної $x_0 \in S(T)$ існує допустиме керування $u = u(t)$, яке переводить x_0 до нуля за час T в силу (1.1).

Відомо, що множину $S(T)$ можна подати у вигляді

$$S(T) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 = - \int_0^T e^{-A\tau} \varphi(u(\tau)) d\tau, \quad u \in \Omega, \quad t \in [0, T] \right\}.$$

Означення 1.1 ([1]). Кажуть, що система (1.1) є θ -керуваною, якщо $0 \in \text{int } S$, де $S = \bigcup_{T>0} S(T)$ — множина θ -керуваності системи (1.1) за довільний час. Зокрема, це означає, що з початку координат можна потрапити до початку координат під дією допустимого керування за траєкторією системи (1.1). Іншими словами, існує допустиме керування та відповідна йому траєкторія, яка починається в 0 при $t = 0$ і закінчується в 0 при $t = T$.

Якщо $0 \in \text{int } S(T)$, то кажуть, що початок координат може бути по-

вернуто в силу системи (1.1) за час T . Іншими словами, для системи (1.1) виконується умова повертайності за час T .

Означення 1.2 ([1]). Кажуть, що для системи (1.1) виконується умова повертайності на відрізку $I = [T^*, T^* + a]$ ($a > 0$, $T^* \geq 0$), якщо для довільного часу $T \in I$ існує допустиме керування $u_T(t)$, для якого розв'язок $x(t)$ наступної задачі Коші

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u_T(t)), \quad x(0) = 0,$$

задовольняє умову $x(T) = 0$.

Умова повертайності на відрізку I означає, що для будь-якого $T \in I$ існує керування $u_T(t) \in \Omega$, задане на відрізку $t \in [0, T]$, для якої

$$\int_0^T e^{-A\tau} \varphi(u_T(\tau)) d\tau = 0,$$

тобто початок координат може бути повернуто в силу системи (1.1) за довільний час T з відрізку I .

Використавши формулу Коші для розв'язку задачі Коші для лінійної системи

$$\dot{x} = Ax + bu_T(t), \quad x(0) = 0, \tag{1.2}$$

отримаємо, що умова повертайності на відрізку означає, що для будь-якого $T \in I$ існує керування $u_T(t) \in \Omega$, $t \in [0, T]$, для якої

$$\int_0^T e^{-At} b u_T(t) dt = 0. \tag{1.3}$$

Лема 1.3 ([1]). Розглянемо систему (1.1) і припустимо, що для неї справджується умова повертайності на I . Тоді початок координат можна повернути в силу цієї системи за будь-який час $T \geq T_I$.

Наслідок 1.4. Розглянемо систему (1.1) і припустимо, що для неї

справджується умова повертайності на $[0, a]$, де число $a > 0$. Тоді початок координат можна повернути за будь-який час $T \geq 0$.

Зв'язок між θ -керованістю системи та умовою повертайності на відрізку встановлює теорема — критерій θ -керованості системи (1.1).

Теорема 1.5 ([1]). Система (1.1) є θ -керованою тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1. умова повертайності виконується на деякому відрізку $I = [T^*, T^* + a]$, де $a > 0$ і $T^* \geq 0$;
2. для матриці A^* не існує власного вектора v , який би відповідав дійсному власному значенню і був таким, що $(v, \varphi(u)) \geq 0$ для довільних $u \in \Omega$;
3. для матриці A^* не існує власного вектора $v = w_1 + iw_2$, який би відповідав недійсному власному значенню і був таким, що $(w_1, \varphi(u)) = (w_2, \varphi(u)) = 0$ для довільних $u \in \Omega$.

Розділ 2

Теоретична частина

2.1. Умова повертайності для довільних лінійних систем другого порядку, матриця яких має дійсні власні значення, одне з яких нуль

Розглянемо довільну лінійну систему другого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \quad |u| \leq c, \quad c > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Отримаємо умову повертайності початку координат в силу цієї системи з кусково-сталими керуваннями. Тут

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці A мають вигляд

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2}, \quad D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}.$$

Матрична експонента e^{At} залежить від власних значень матриці. Якщо $D < 0$, то матриця системи має комплексні власні значення. Якщо $D = 0$, то матриця системи має дійсні рівні власні значення. Якщо $D > 0$, то матриця системи має дійсні різні власні значення. Розглядаємо випадок, коли матриця системи має дійсні власні значення, одне з яких дорівнює 0,

тобто $D \geq 0$ та $\lambda_1 = 0$.

Інтерполяційний поліном Лагранжа-Сильвестра знайдемо із рівняння

$$\begin{vmatrix} r(\lambda) & 1 & e^{\lambda_2 t} \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже,

$$r(\lambda) * \lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda) - e^{\lambda_2 t} \lambda = 0$$

і матрична експонента має вигляд

$$r(\lambda) = e^{At} = \frac{(\lambda_2 E - A) + e^{\lambda_2 t} A}{\sqrt{D}} = \begin{pmatrix} n_{11} - m_{11}e^{\lambda_2 t} & n_{12} - m_{12}e^{\lambda_2 t} \\ n_{21} - m_{21}e^{\lambda_2 t} & n_{22} - m_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

де

$$n_{ij} = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2\sqrt{D}} - a_{ij} = 1 - a_{ij}, \quad m_{ij} = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2\sqrt{D}} - a_{ij} = -a_{ij},$$

$i, j = 1, 2$. Тоді $e^{-At}b$ знаходимо так:

$$e^{-At}b = \begin{pmatrix} (n_{11} - m_{11}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{12} - m_{12}e^{-\lambda_2 t})b_2 \\ (n_{21} - m_{21}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{22} - m_{22}e^{-\lambda_2 t})b_2 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Керування з одним перемиканням

Нехай керування $u(t)$ є кусково-сталим і має одну точку перемикання t_1 . Таке керування має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} -c, & t \in [0, t_1), \\ c, & t \in [t_1, T], \end{cases} \quad 0 < t_1 < T, \quad c \neq 0. \quad (2.2)$$

Підставимо це керування (2.2) в умову повертайності (1.3):

$$\int_0^T e^{-At} b u(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-At} b u(t) dt + \int_{t_1}^T e^{-At} b u(t) dt = I_1 + I_2,$$

де

$$\begin{aligned} I_1 &= -c \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} n_{11} - m_{11}e^{-\lambda_2 t} & n_{12} - m_{12}e^{-\lambda_2 t} \\ n_{21} - m_{21}e^{-\lambda_2 t} & n_{22} - m_{22}e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} dt \\ &= -c b_1 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{pmatrix} dt + c b_1 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} m_{11}e^{-\lambda_2 t} \\ m_{21}e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} dt \\ &\quad - c b_2 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \end{pmatrix} dt + b_2 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} m_{12}e^{-\lambda_2 t} \\ m_{22}e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} dt = \\ &= c b_1 t_1 \begin{pmatrix} -n_{11} \\ -n_{21} \end{pmatrix} - \frac{c b_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \\ m_{21}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \end{pmatrix} \\ &\quad + c b_2 t_1 \begin{pmatrix} -n_{12} \\ -n_{22} \end{pmatrix} - \frac{c b_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \\ m_{22}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_1}^T e^{-At} b u(t) dt \\ &= c \int_{t_1}^T \left((n_{11} - m_{11}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{12} - m_{12}e^{-\lambda_2 t})b_2 \right) dt \\ &= c b_1 (T - t_1) \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{pmatrix} - \frac{c b_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \\ m_{21}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \end{pmatrix} \\ &\quad + c b_2 (T - t_1) \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \end{pmatrix} - \frac{c b_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \\ m_{22}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-At} b u(t) dt = I_1 + I_2 = c b_1 (T - 2t_1) \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{pmatrix} \\ - \frac{c b_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11} (2e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{21} (2e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix} \\ + c b_2 (T - 2t_1) \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \end{pmatrix} \\ - \frac{c b_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12} (2e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{22} (2e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Оскільки $c \neq 0$, то на нього можна скоротити і отримати систему для визначення t_1 для заданого T . Розв'язок цієї системи

$$t_1 = T = 0.$$

Таким чином, отримали, що для такої системи і для керувань (2.2) умова повертальності початку координат не виконана.

2.1.2. Керування з двома перемиканнями

Перейдемо до керувань з двома точками перемикання:

$$u(t) = \begin{cases} -c, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ c, & t \in [t_1, t_2), \end{cases} \quad 0 < t_1 < t_2 < T. \quad (2.3)$$

У цьому випадку для заданого значення T одержимо таку систему для знаходження t_1 і t_2 :

$$\begin{aligned}
& cb_1(-T + t_2 - t_1) \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{pmatrix} - \frac{cb_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}(2e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{21}(2e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix} \\
& + cb_2(t_2 - t_1) \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \end{pmatrix} - \frac{cb_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}(2e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{22}(2e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

При $\lambda_2 = 0$ розрахунки аналогічні, отримується система:

$$\begin{aligned}
& \frac{cb_1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{11}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \\ n_{21}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \end{pmatrix} - cb_1(-T + t_2 - t_1) \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} \\
& + \frac{cb_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{12}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \\ n_{22}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \end{pmatrix} - cb_2(t_2 - t_1) \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що в першому випадку $\lambda_2 > 0$, система не є стійкою.

У другому $\lambda_1 < 0$, система стійка, а моменти перемикання керування можна знайти чисельно, наприклад, за допомогою коду в Python.

Розділ 3

Практична частина

3.1. Опис середовища програмування

Мова Python є дуже зручною для проведення математичних операцій, завдяки вже написаним бібліотекам та солверам, різноманіття яких постійно збільшується. Вони дозволяють вирішувати стандартні рівняння та будувати графіки. Недоліком є дещо низька швидкість.

3.2. Приклад системи

Розглянемо лінійну систему другого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2, \quad |u| \leq 1. \\ T = 5 \end{cases} \quad (3.1)$$

Визначимо матрицю та вектор b

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умова Калмана

Обчислимо

$$Ab = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Матриця Калмана $\mathcal{C} = [b \quad Ab]$ набуває вигляду

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

а її визначник $\det \mathcal{C} = -3 - 0 = -3 \neq 0$. Отже $\text{rank } \mathcal{C} = 2$ — система керована.

Власні значення

$$D = (2 + 3)^2 + 4 * 2 * (-3) = 1$$

$$\lambda_1 = (-1 - 1)/2 = -1$$

$$\lambda_2 = (-1 + 1)/2 = 0$$

3.3. Синтез керування

Шукаємо керування з двома перемиканнями, за формулою (2.3). У програмі t_1 та t_2 знаходяться чисельно, перебираються значення та вибираються такі, у яких найменша нев'язка. Результат:

$$t_1 = 1.88574255$$

$$t_2 = 4.38574255$$

Графіки $x_1(t)$, $x_2(t)$:

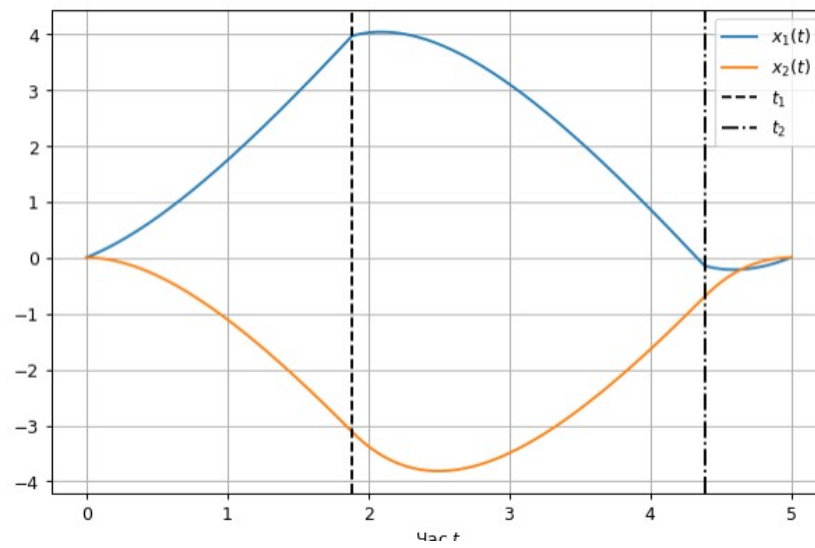


Рис. 3.1

Аналогічно для $T = 3$:

$$t_1 = 1.0082661$$

$$t_2 = 2.5082661$$

Графіки $x_1(t)$, $x_2(t)$:

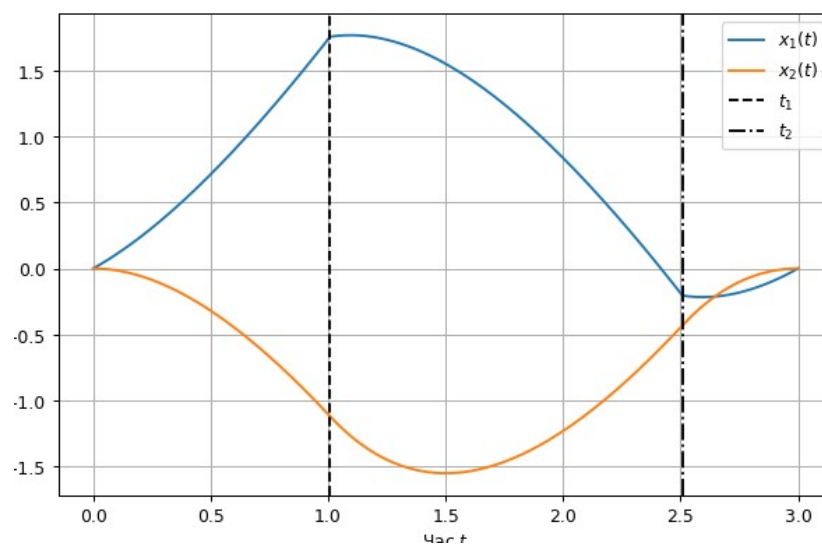


Рис. 3.2

Висновки

У роботі вивчено задачу повертайності початку координат в силу довільних лінійних систем другого порядку, матриця яких має одне нульове власне значення, з керуваннями, які мають різну кількість точок перемикавання. Показано, що керування з одним перемиканням не забезпечує повертайність початку координат в силу такої системи. Для керування з двома перемиканнями отримано систему для знаходження моментів перемикавання. Продемонстровано застосування на прикладі, проведено чисельну симуляцію, надано графіки координат системи.

Зазначимо також, що деякі питання залишились відкритими та мають бути досліджені додатково. Зокрема, питання існування та єдиності розв'язків системи для знаходження моментів перемикавання керування.

Список використаних джерел

- [1] V.I. Korobov. Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control, J. of Optim. Theory and Applications, 2007, Vol. 134, p. 161–176.
- [2] В.І. Коробов, Т.І. Сморцова. Керованість та стабілізація, навчальний посібник, видавництво ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2017 р.
- [3] Прогнімак О.С. «Задача про повернення початку координат в силу лінійних систем». Кваліфікаційна робота магістра, Харків, 2022.

Додаток

Код для чисельного знаходження перемикачів

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

A = np.array([[2.0, 2.0], [-3.0, -3.0]])
b = np.array([1.0, 0.0])
c = 1.0
T = 5.0
t1, t2 = 1.88574255, 4.38574255
x0 = np.array([0., 0.])

def integrate_segment(u, t_start, t_end, x_init, n_points):
    ts = np.linspace(t_start, t_end, n_points)
    sol = solve_ivp(lambda t, x: A.dot(x) + b*u,
                    [t_start, t_end], x_init,
                    t_eval=ts,
                    method='DOP853',          # високий порядок
                    rtol=1e-9, atol=1e-12)    # жорсткі допуски
    return sol.t, sol.y

# 1-й сегмент u=+c
t1_seg, y1 = integrate_segment(+c, 0, t1, x0, 100)
```

```

# 2-й сегмент  $u=-c$ 
t2_seg, y2 = integrate_segment(-c, t1, t2, y1[:, -1], 200)

# 3-й сегмент  $u=+c$ 
t3_seg, y3 = integrate_segment(+c, t2, T, y2[:, -1], 300)

# зшиваємо
ts_full = np.hstack([t1_seg, t2_seg, t3_seg])
x_full = np.hstack([y1, y2, y3])

# друкуємо фінальний стан
xT = x_full[:, -1]
print(f"[Жорстке інтегрування]  $x(T) = [{xT[0]:.6e}, {xT[1]:.6e}]$ ")

# будуємо графік
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(ts_full, x_full[0], label='$x_1(t)$')
plt.plot(ts_full, x_full[1], label='$x_2(t)$')
plt.axvline(t1, color='k', linestyle='--', label='$t_1$')
plt.axvline(t2, color='k', linestyle='-.', label='$t_2$')
plt.xlabel('Час  $t$ ')
plt.ylabel('Компоненти стану')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

Код для побудови графіка

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

from scipy.integrate import solve_ivp

A = np.array([[2.0,2.0],[-3.0,-3.0]])
b = np.array([1.0,0.0])
c = 1.0
T = 5.0
t1, t2 = 1.88574255, 4.38574255
x0 = np.array([0., 0.])

def integrate_segment(u, t_start, t_end, x_init, n_points):
    ts = np.linspace(t_start, t_end, n_points)
    sol = solve_ivp(lambda t,x: A.dot(x) + b*u,
        [t_start, t_end], x_init,
        t_eval=ts,
        method='DOP853',          # високий порядок
        rtol=1e-9, atol=1e-12)    # жорсткі допуски
    return sol.t, sol.y

# 1-й сегмент u=+c
t1_seg, y1 = integrate_segment(+c, 0, t1, x0, 100)
# 2-й сегмент u=-c
t2_seg, y2 = integrate_segment(-c, t1, t2, y1[:,-1], 200)
# 3-й сегмент u=+c
t3_seg, y3 = integrate_segment(+c, t2, T, y2[:,-1], 300)

# зшиваємо
ts_full = np.hstack([t1_seg, t2_seg, t3_seg])

```

```

x_full = np.hstack([y1, y2, y3])

# друкуємо фінальний стан
xT = x_full[:, -1]
print(f"[Жорстке інтегрування] x(T) = [{xT[0]:.6e}, {xT[1]:.6e}]")

# будуємо графік
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(ts_full, x_full[0], label='$x_1(t)$')
plt.plot(ts_full, x_full[1], label='$x_2(t)$')
plt.axvline(t1, color='k', linestyle='--', label='$t_1$')
plt.axvline(t2, color='k', linestyle='-.', label='$t_2$')
plt.xlabel('Час $t$')
plt.ylabel('Компоненти стану')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```